第12卷 第3期 含 能 材 料 Vol. 12, No. 3
2004年6月 ENERGETIC MATERIALS June, 2004

文章编号: 1006-9941(2004)03-0151-04

高价值火工品可靠性增长评定方法研究

曹建华, 蔡瑞娇, 董海平
(北京理工大学爆炸灾害预防与控制国家重点实验室, 北京 100081)

摘要: 对高价值火工品的可靠性增长模式进行了分析,提出了一种将增长过程各阶段试验数据折合为最终试验阶段数据的折合方法,并推导出折合后最终阶段的经典可靠性置信下限和 Bayes 置信下限。实际算例表明,采用本文的折合方法对增长过程各阶段试验数据进行折合后利用,评估出的可靠性更符合产品实际情况。

关键词: 应用统计数学; 火工品; 可靠性增长; 可靠性评定; 折合因子
中图分类号: TB 114.3; TJ 450 **文献标识码**: A

1 引 言

随着火工品被越来越广泛地用于航空航天和复杂武器装备中,对其可靠性的要求越来越高,价值也越来越昂贵。在鉴定和验收时,如果还沿用 GJB376[1] 来评估其可靠性,则试验成本会相当高,承制方往往难以承受。但是,如果减少试验量,则评估出的产品可靠性不能反映产品的真实情况,使用方也不能接受。因此,迫切需要研究适合高价值火工品可靠性评估的小样本方法。本研究利用高价值火工品研制过程中的可靠性增长信息来进行可靠性评估,目的是充分利用各阶段试验信息使最终的评估结果更符合产品的实际情况。

2 火工品的可靠性增长模式

火工品属于一次性产品,其研制过程遵循 TFT (Test-Fix-Test)原则,其可靠性也随着试验-修正-再试验的循环过程而获得增长。确切地说,火工品的可靠性增长是一个延缓修正的过程,即在试验中发现缺陷后,并不立即停止,而是试验完后,通过失效分析,确定该次试验的所有失效原因后,再同时改进,然后进行下一次试验。这样,对整个研制过程来说,火工品的可靠性增长过程是不连续的,而是一个随研制阶段发展跳跃式增长的过程,因此,它的数学模型可用离散型的增长模型表示。周源泉[2] 介绍了几种离散型增长模型,其中对一次性作用产品最常用的模型是 Duane 模型和 Compertz 模型,这两个模型主要用于对增长过程进行拟合和预测,在评定可靠性方面却存在缺陷。本文拟采用基于二项分布的离散模型来评定火工品研制过程中某一阶段的可靠性。

3 火工品试验数据的分布及经典评估方法

火工品的作用可靠性试验数据通常都是成败型数据,成败型数据常利用二项分布进行处理,方法如下。

设有某火工品进行可靠性试验,试验产品 n 个,记失败数为 X, X 是随机变量。试验后有试验数据(n, f),表示试验 n 个产品中有 f 个产品试验失败,则随机变量 X 服从二项分布

$$P\{X = f\} = \binom{n}{f} p^f (1-p)^{n-f} \tag{1}$$

式中, p 为产品的不可靠度或失败概率。

通常我们利用式(1)可获得参数 p 的估计值,其极大似然点估计值为: $\hat{p} = f/n$ 。GB4087.3-85[3] 给出了求置信度为 γ 时的经典置信上限 p_u 的方法如下:

当 $f=0$ 时, $p_u = 1-(1-\gamma)^{1/n}$;

当 $1 \leqslant f < n$ 时,

$$\sum_{x=0}^{f} \binom{n}{x} p_u^x (1-p_u)^{n-x} = 1-\gamma; \tag{2}$$

当 $f=n$ 时, $p_u=1$。

对于 $f=0$ 和 $f=n$ 时的 p_u 容易计算求得,当 $1 \leqslant f < n$ 时则可通过以下的方法求解 p_u。由于二项分布与 β 分布有如下关系式:

$$\frac{1}{B(f+1, n-f)} \int_{p_u}^{1} y^f (1-y)^{n-f-1} \mathrm{d}y$$

收稿日期: 2003-11-26; **修回日期**: 2004-02-04
作者简介: 曹建华(1973 -),男,博士研究生,从事可靠技术的相关研究。e-mail: cjh51168@sina.com

$$= \sum_{x=0}^{f} \binom{n}{x} p_u^x (1-p_u)^{n-x} \quad (3)$$

其中，$B(f+1, n-f) = \int_0^1 y^f (1-y)^{n-f-1} \mathrm{d}y$。因此可得

$$p_u = \beta_\gamma (f+1, n-f) \quad (4)$$

式(4)中 $\beta_\gamma(f+1, n-f)$ 为 $\beta(f+1, n-f)$ 的 γ 下侧分位数。

而 β 分布分位数与 F 分布分位数又有以下关系式：

$$\beta_\gamma(k_1, k_2) = \left(1 + \frac{k_2}{k_1} F^{-1}_{2k_1, 2k_2; \gamma}\right)^{-1} \quad (5)$$

则由式(4)和式(5)可推出 p_u 的求解公式，即

$$p_u = \left(1 + \frac{n-f}{f+1} F^{-1}_{2f+2, 2-2f; \gamma}\right)^{-1} \quad (6)$$

其中 F 分布的分位数可查表获得。

由式(6)计算出 p_u 后，则 $R_L = 1 - p_u$ 即为作用可靠度的经典估计下限值。由于以上介绍的方法仅利用了当前阶段的试验数据，当试验数量较少时，就存在可靠性估计不足的问题。因此，需要充分利用可靠性增长过程中各阶段的试验信息，使得最终估计结果更符合产品的真实情况。

4 可靠性增长的阶段信息折合

可靠性增长过程中，产品在不同阶段有不同的试验数据。为了充分利用所有阶段的试验数据，田国梁[4]提出了阶段信息折合因子的概念，并提出了一种折合方法，即将前面 $1 \sim (m-1)$ 阶段的试验量折合成需要评估的第 m 阶段的试验量，保持失效数不变，但他没有给出该折合因子的物理意义。本文将给出另外一种折合方法，即保持试验量不变，对失效数进行折合的方法，并阐述折合因子的物理意义。

设产品的研制规划为 m 个阶段，其可靠性随研制阶段不断增长，即

$$1 > p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_i \geqslant \cdots \geqslant p_m > 0 \quad (7)$$

其中 p_i 为产品在第 i 阶段试验时的失败概率，可由式(6)利用该阶段试验数据求得，式(7)是下文中 Bayes 估计的约束条件。

定义：阶段 i 对阶段 m 的信息折合因子 $D_{i,m}$ 等于产品在阶段 m 时的失败概率与阶段 i 时的失败概率之比，即

$$D_{i,m} = p_m / p_i, \quad i = 1, 2, 3, \cdots, m-1 \quad (8)$$

从式(7)可知，$D_{i,m}$ 为 $(0 \sim 1)$ 区间上的实数。当试验阶段 i 的试验结果为 (n_i, f_i) 时，将其折合为阶段 m 的试验数据则为 $(n_i, D_{i,m} f_i)$。

从以上的折合因子定义可知，折合因子的物理意义在于：在第 i 阶段试验时，试验 n_i 个，失败 f_i 个，经过查找失败原因，发现有 f_i 种失效模式或产品的某些性能达不到技术指标规定量的有 f_i 个产品，经过对产品进行改进，到第 m 阶段时，在 n_i 个试验产品中，只有 $D_{i,m} f_i$ 种失效模式或产品某些性能达不到技术指标规定量的有 $D_{i,m} f_i$ 个，而其它 $(1 - D_{i,m}) f_i$ 个产品获得了改进达到了要求。

从以上的分析看，当将前 $(m-1)$ 个阶段的试验数据折合为第 m 阶段的信息时，则总的试验数据为 $\left(\sum_{i=1}^{m} n_i, \sum_{i=1}^{m} D_{i,m} f_i\right)$。若令 $n' = \sum_{i=1}^{m} n_i, f' = \sum_{i=1}^{m} D_{i,m} f_i$，则由式(6)可得包含了 m 个阶段试验信息的第 m 阶段时产品的经典可靠性置信下限 R_L，即

$$R_L = 1 - p_u = 1 - \left(1 + \frac{n'-f'}{f'+1} F^{-1}_{2f'+2, 2n'-2f'; \gamma}\right)^{-1} \quad (9)$$

由于式中 f' 不一定是整数，因此此处的 F 分布为广义 F 分布，与式(6)有区别。

5 利用增长试验的 Bayes 评估方法

5.1 关于 p_i 的 Bayes 先验分布的讨论

在火工品的可靠性增长过程中，由于第一阶段以前没有任何试验信息，因此对于第一阶段可取无信息先验分布，无信息先验分布有多种取法，必须根据实际情况来进行选取。

有了第一阶段试验数据后，第二阶段及以后的先验分布就不再是无信息的。从前述知火工品的试验数据服从二项分布，可取二项分布的共轭分布为先验分布，二项分布的共轭分布是 β 分布。若 $(p_1, p_2, \cdots, p_m)$ 是相互独立的变量，则在第 i 阶段，其先验分布可表示为

$$\pi_i(p_i) = p_i^{\alpha_i - 1} (1-p_i)^{b_i - 1}, i = 1, 2, 3, \cdots, m \quad (10)$$

其中，如何计算 a_i 和 b_i 是确定先验分布的关键。由于式(7)的约束，式(10)并不是 p_i 在式(7)约束下的先验分布，这里称其为伪验前分布，为了后面的利用，所以在这里先对其进行讨论。

当 $i=1$ 时，如果用 Reformulation 方法[5]和林德莱(Lindley)原则[6]可取无信息先验分布为

$$\pi_1(p_1) = \beta(p_1 \mid 0, 0) \propto p_1^{-1} (1-p_1)^{-1} \quad (11)$$

即取 $a_1 = 0, b_1 = 0$，表示在此之前试验数和失败数均为零，即没有进行试验。如果取 $a_1 = 1, b_1 = 1$，则 $\pi_1(p_1) = 1$，正好是 Bayes 假设。

当 $i>1$ 时，即从第二阶段起，由于有了前阶段的试验数据，将各阶段信息利用折合因子 $D_{i,m}$ 折合成第 m 阶段的试验信息，则 a_i 和 b_i 可取值如下：

$$\begin{aligned} a_i &= a_{i-1} + D_{i-1,m} f_{i-1} \\ b_i &= b_{i-1} + n_{i-1} - D_{i-1,m} f_{i-1} \end{aligned} \qquad (12)$$

综合以上讨论，本文根据实际情况取第一阶段的伪先验分布为 $\pi_1(p_1) = \beta(p_1 \mid 0,0)$，第二阶段及以后的伪先验分布为 $\pi_i(p_i) = p_i^{\alpha_i - 1}(1-p_i)^{b_i - 1}$，其中 a_i 和 b_i 取值由式(12)确定。

5.2　p_m 的后验分布

由于 p_m 是受式(7)约束的随机变量，所以必须通过 $(p_1, p_2, \cdots, p_m)$ 的联合后验分布来求 p_m 的后验分布。$(p_1, p_2, \cdots, p_m)$ 的联合先验分布如下：

$$\pi(p_1, p_2, \Lambda, p_m) = \prod_{i=1}^{m} \pi_i(p_i) \Big/ \int_\Omega \prod_{i=1}^{m} \pi_i(p_i) dp_1 dp_2 \Lambda dp_m \qquad (13)$$

式中，$\Omega = \{p_1, p_2, \cdots, p_m \mid (1 > p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_i \geqslant \cdots \geqslant p_m > 0)\}$。

从式(13)可见，$\pi(p_1, p_2, \Lambda, p_m) \neq \prod_{i=1}^{m} \pi_i(p_i)$，因此称式(10)为 p_i 的伪先验分布。当前试验数据经折合后为 $(n_i, D_{i,m} f_i)$，且服从二项分布，令 $f_i' = D_{i,m} f_i$，则由 Bayes 定理结合式(10)可得 $(p_1, p_2, \cdots, p_m)$ 的联合后验分布为

$$\pi(p_1, p_2, \Lambda, p_m \mid (n_i, f_i')) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i + f_i' - 1}(1-p_i)^{b_i + n_i - f_i' - 1} \Big/ \int_\Omega \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i + f_i' - 1}(1-p_i)^{b_i + n_i - f_i' - 1} dp_1 dp_2 \Lambda dp_m \qquad (14)$$

由此式对 $(p_1, p_2, \cdots, p_{m-1})$ 积分可得 p_m 的后验分布为：

$$\pi(p_m \mid (n_i, f_i')) = \int_{\Omega_1} \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i + f_i' - 1}(1-p_i)^{b_i + n_i - f_i' - 1} dp_1 dp_2 \Lambda dp_{m-1} \Big/ \int_\Omega \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i + f_i' - 1}(1-p_i)^{b_i + n_i - f_i' - 1} dp_1 dp_2 \Lambda dp_m \qquad (15)$$

其中，$\Omega_1 = \{p_1, p_2, \cdots, p_{m-1} \mid (1 > p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_{m-1} \geqslant p_m > 0)\}$。

利用二项分布与 β 分布的关系式，即式(3)，对式(15)中分子分母上的 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 分别进行积分并化简最终可得：

$$\pi(p_m \mid (n_i, f_i')) = \frac{\sum_{k_1=0}^{F_1-1} \sum_{k_2=0}^{F_2-1} \Lambda \sum_{k_{m-1}=0}^{F_{m-1}-1} E(k_1, k_2, \Lambda, k_{m-1}) \beta(p_m \mid F_m, S_m)}{\sum_{k_1=0}^{F_1-1} \sum_{k_2=0}^{F_2-1} \Lambda \sum_{k_{m-1}=0}^{F_{m-1}-1} E(k_1, k_2, \Lambda, k_{m-1})} \qquad (16)$$

其中，

$$\begin{gathered} F_1 = f_1' + a_1, \\ S_1 = b_1 + n_1 - f_1' \\ F_i = f_i' + a_i + k_{i-1}, \\ S_i = S_{i-1} + F_{i-1} + b_i + n_i - f_i' - k_{i-1} - 1, i = 2,3,\cdots,m \\ E(k_1 k_2, \Lambda, k_{m-1}) = \prod_{i=1}^{m-1} \binom{S_i + F_i - 1}{k_i} B(F_i, S_i) \end{gathered}$$

式(16)类似于陈世基[7]和田国梁[4]的推导结果，不过其中的 f_i' 为实数。

5.3　p_m 上限的计算

由式(16)可知，p_m 的置信度为 γ 的 Bayesian 上限符合下式：

$$\frac{\sum_{k_1=0}^{F_1-1} \sum_{k_2=0}^{F_2-1} \Lambda \sum_{k_{m-1}=0}^{F_{m-1}-1} E(k_1, k_2, \Lambda, k_{m-1}) I(p_{m,u} \mid F_m, S_m)}{\sum_{k_1=0}^{F_1-1} \sum_{k_2=0}^{F_2-1} \Lambda \sum_{k_{m-1}=0}^{F_{m-1}-1} E(k_1, k_2, \Lambda, k_{m-1})} = 1 - \gamma \qquad (17)$$

其中，$I(p_{m,u} \mid F_m, S_m) = \dfrac{\int_{p_{m,u}}^{1} y^{F_m - 1}(1-y)^{S_m - 1} dy}{B(F_m, S_m)}$。由于式中 F_m 不是整数，因此需插值求解 $p_{m,u}$。当 m 较大时，该式的计算相当复杂，笔者已编写求解该式的计算机程序，能方便快捷的得出结果。

6　数值例

某型高价值火工品处于研制的第三阶段，进行过两次改进，三阶段所做试验结果用数据形式（试验数，失败数）表示依次为(15,8)、(25,3)、(50,2)，本例中取置信度 $\gamma = 0.9$。用式(6)计算各阶段的经典不可靠度上限，分别为：$p_{1u} = 0.7175$，$p_{2u} = 0.248$，$p_{3u} = 0.1025$，则可靠度下限分别为 $R_{1L} = 0.2825$，$R_{2L} = 0.752$，$R_{3L} = 0.8975$。利用式(8)求折合因子 $D_{1,3} = p_{3u}/p_{1u} = 0.1429$，$D_{2,3} = p_{3u}/p_{2u} = 0.4133$。折合后的三阶段试验数据分别为(15,1.1429)、(25,1.2399)、(50,2)。

现利用折合后的试验数据进行第三阶段的可靠度

www.energetic-materials.org.cn 含能材料

估计,对于经典估计,三个阶段总的试验数据为(90,4.3828),代入式(9),并用插值计算 F 分布的分位数,得:$R_{3L}'=0.9087$。

对于 Bayes 估计,取第一阶段 p_1 的伪先验分布为 $\pi_1(p_1)=\beta(p_1 \mid 0,0)$,即 $a_1=0,b_1=0$。代入式(17)计算,计算结果为:$p_{3u}''=0.0618$,则 $R_{3L}''=0.9382$。

比较三种估计方法的结果,$R_{3L}''=0.9382>R_{3L}'=0.9087>R_{3L}=0.8975$。可见,同等置信度条件下,只利用当前阶段的经典估计是最保守的估计,利用了折合信息的经典估计也比较保守,而利用了折合信息的 Bayes 估计则是最能体现产品实际可靠度的方法。

7 结 论

利用折合因子对高价值火工品可靠性增长过程中各阶段的试验数据进行折合后使用,可以有效地利用增长过程中的试验信息,从而使最终阶段的评估结果更符合产品的实际情况。本文给出了经典的估计方法和 Bayes 估计方法,均能有效估计出最终阶段的可靠性下限值,相比之下,Bayes 方法更为有效,但使用起来也更复杂。

另外,本文描述的方法同样适用于其它含延缓修正的成败型产品的可靠性估计,需要注意的是,在应用 Bayes 方法进行评估时,应该根据产品的实际情况选取先验分布。

参考文献:

[1] GJB376-87. 火工品可靠性评估方法[S]. 北京:国防科工委军标出版发行部,1987.
GJB376-87. Assessment Method of Reliability of Initiating Devices[S]. Beijing: Military Standard Press of Commission of Science Technology and Industry for National Defense,1987.

[2] 周源泉,翁朝曦. 可靠性增长[M]. 北京:科学出版社,1992.

[3] GB 4087.3-85. 数据的统计处理和解释,二项分布可靠度单侧置信下限[S]. 北京:中国标准出版社,1985.
GB 4087.3-85. Statistic disposal and interpretation for data,one-sided lower confidence limit of reliability for binomial distribution[S]. Beijing: China Standard Press,1985.

[4] 田国梁. 二项分布的可靠性增长模型[S]. 宇航学报,1992(1):55-61.
TIAN Guo-liang. Reliability growth models for binomial distribution[J]. *Journal of Astronautics*,1992,13(1):55-61.

[5] 周源泉,翁朝曦. 可靠性评定[M]. 北京:科学出版社,1990,44-48.

[6] 张尧庭,陈汉峰. 贝叶斯统计推断[M]. 北京:科学出版社,1991,45-46.

[7] 陈世基. 具有可靠性增长的二、三项分布概型参数 Bayes 估计的注记[M]. 福建师大学报(自然科学版),1983(1):11-16.
CHEN Shi-ji. A note on Bayes estimation for parameters of binomial and trinomial distributions with reliability growth[J]. *Journal of Fujian Normal University (Natural Science Edition)*,1983(1):11-16.

Study on Evaluation Method of Reliability Growth for High Cost Initiating Explosive Devices

CAO Jian-hua, CAI Rui-jiao, DONG Hai-ping
(*State Key Lab. of Prevention and Control of Explosion Disaster, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

abstract: The reliability growth mode of high-cost initiating explosive devices was analyzed in this paper. Based on this mode, the conversion method with which all test data in the process of reliability growth were converted to the data of the last phase was presented. And the lower confidence boundaries of reliability were educed with classical and Bayesian approach respectively. Finally a calculation example was given to identify that the method is available to estimate the last phase reliability of products in the process of reliability growth.

keywords: applied statistic mathematics; initiating explosive device; reliability growth; reliability evaluation; conversion factor

www.energetic-materials.org.cn 含能材料